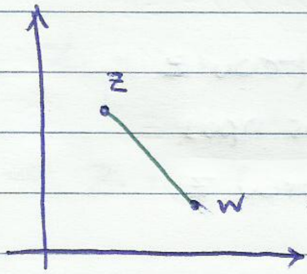
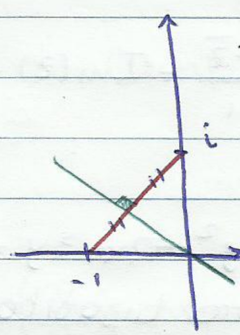
ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ




$|z-w| = d$

Εφαρμογή:

$A = \{ z : |z-i| = |z+1| \}$



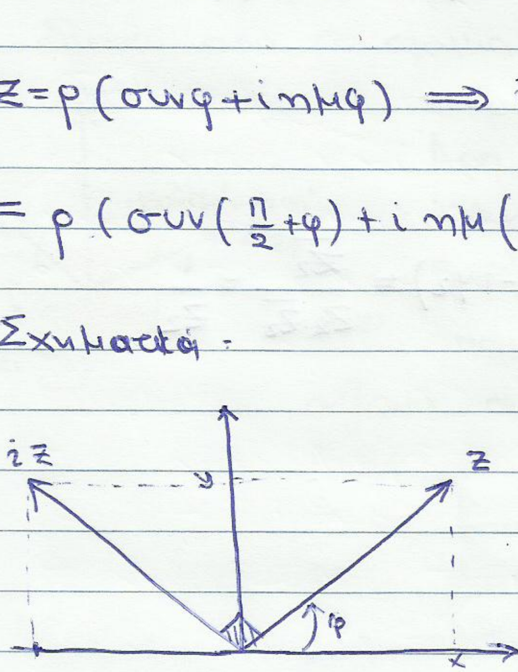

Θέλουμε $|z-i| = |z-(-1)|$
Δηλ. ψάχναμε το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν από το $-1$ και το $i$. Ο γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος. Δηλ. είναι η ευθεία $y=-x$.
$z = x+yi = x+i(-x) = x(1-i)$, $x \in \mathbb{R}$

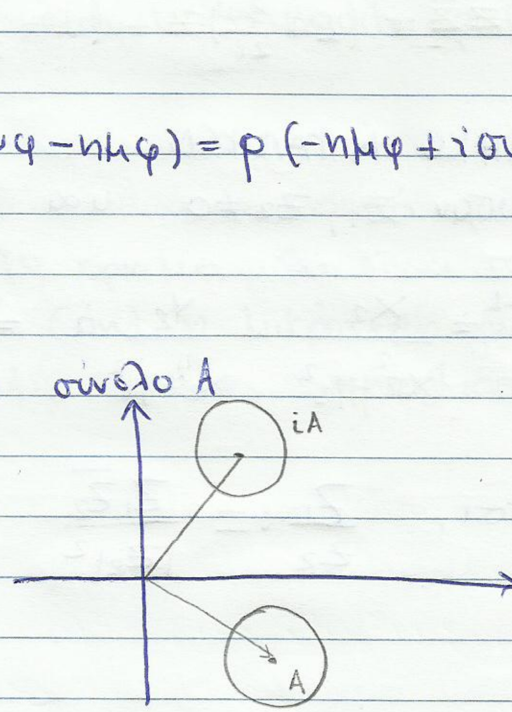
Είχαμε δει ότι

$z = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi) \Longrightarrow iz = \rho(i\sigma\upsilon\nu\varphi - \eta\mu\varphi) = \rho(-\eta\mu\varphi + i\sigma\upsilon\nu\varphi) =$

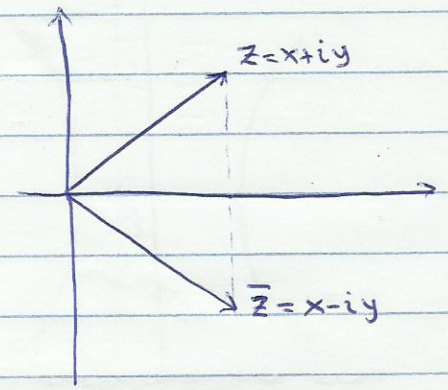
$= \rho\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) + i\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right)$.

Σχηματικά: ή σε ένα σύνολο A



## ΣΥΖΗΓΗΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ




ο $\bar{z}$ καλείται σύζηγής του $z$ και είναι συμμετρικός ως προς τον πραγματικό άξονα στον $z$.

Παρατήρηση:

- $z+\bar{z}=2x \Rightarrow x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}=Re(z)$
- $z-\bar{z}=2iy \Rightarrow y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}=Im(z)$

Επίσης $z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$

Εφαρμογή:

Έστω ο κύκλος $x^2+y^2+2x+3y=2$ στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$

Να αναπαρασταθεί στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$.

ΛΥΣΗ

$$x^2+y^2+2x+3y=2 \Rightarrow z\bar{z}+z+\bar{z}+\frac{3}{2i}(z-\bar{z})=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z\bar{z}+\left(1+\frac{3}{2i}\right)z+\left(1-\frac{3}{2i}\right)\bar{z}=2 \quad \text{Μιγαδική μορφή}$$

## ΠΗΛΙΚΟ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ:

Έστωσαν $z_1, z_2 \neq 0$ και $z_2=x_2+iy_2$

$$z_2^{-1}=\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2}-\frac{y_2}{x_2^2+y_2^2}i=\frac{1}{x_2^2+y_2^2}(x_2-iy_2)=\frac{\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{1}{z_2}$$

Έτσι, $\dfrac{z_1}{z_2}:=\dfrac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$

Διαφορετικα, έχουμε:

$z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1 = \rho_1(\text{συν}\varphi_1 + i\,\text{ημ}\varphi_1)$ και $z_2 = \rho_2(\text{συν}\varphi_2 + i\,\text{ημ}\varphi_2)$

Έτσι, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1\rho_2(\text{συν}\varphi_1 + i\,\text{ημ}\varphi_2)(\text{συν}\varphi_2 - i\,\text{ημ}\varphi_2)}{\rho_2^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[(\text{συν}\varphi_1\,\text{συν}\varphi_2 + \text{ημ}\varphi_1\,\text{ημ}\varphi_2) + i(\text{ημ}\varphi_1\,\text{συν}\varphi_2 - \text{συν}\varphi_1\,\text{ημ}\varphi_2)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\text{συν}(\varphi_1-\varphi_2) + i\,\text{ημ}(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

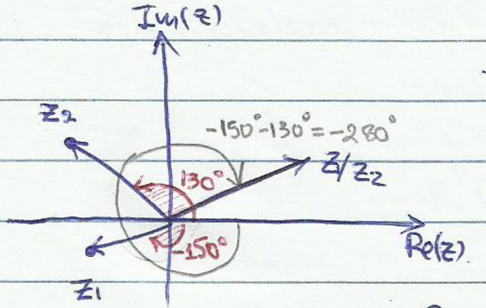
Άρα, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

Τέλος, το όρισμα $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

Το βασικό όρισμα

$\text{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2) + 2k\pi, \; k = 0, 1, -1$

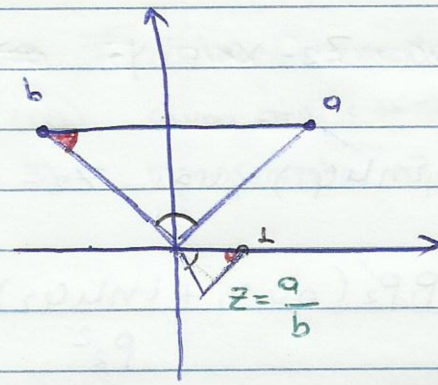
Το $2k\pi$ το αθροίζουμε στη σχέση με το βασικό όρισμα διότι από το σχήμα:



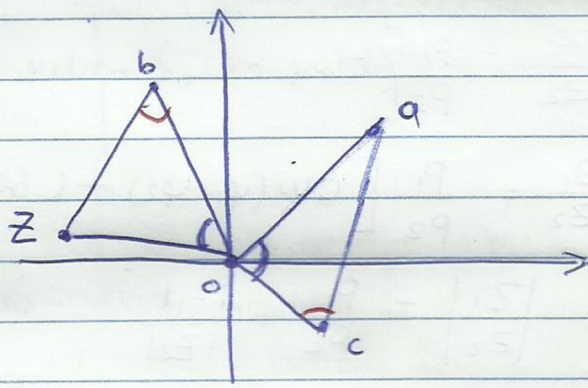

Άρα το $-280°$ δεν είναι το βασικό όρισμα αλλά το βασικό όρισμα θα είναι το $360° - 280° = 80°$ (δηλ. η μικρότερη γωνία που θα στρέψουμε τον πραγματικό άξονα στο $z_1/z_2$)

Γεωμετρικά το πηλίκο

1) $z = \frac{a}{b} = \frac{z}{1}$




2) $z = \frac{ab}{c} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{z}{b}$




ΔΥΝΑΜΗΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ:

- $n \in \mathbb{N}$, $z^n = \overbrace{z \cdot z \cdots z}^{n \text{ φορές}}$
- $n = 0$, $z^0 = 1$, $z \neq 0$
- $n = -k$ : $z^n = \frac{1}{z^k}$, $k \in \mathbb{N}$

Στην τριγωνομετρική μορφή τώρα:

$z^1 = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)$

$z^2 = \rho^2 \cdot (\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi) =$

$z^2 = \rho^2 \cdot (\sigma\upsilon\nu(2\varphi) + i\eta\mu(2\varphi))$

: Μαθηματική επαγωγή

Έστω ισχύει για k (δηλ. $z^k = \rho^k(\sigma\upsilon\nu(k\varphi) + i\eta\mu(k\varphi))$)

και θΔΟ ισχυει για $k+1$ (δηλ. $z^{k+1} = \rho^{k+1}(\sigma\upsilon\nu((k+1)\varphi) + i\eta\mu((k+1)\varphi))$

$$z^{k+1} = z \cdot z^k = \rho^{k+1}(\sigma\upsilon\nu(k\varphi) + i\,\eta\mu(k\varphi))(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi) =$$

$$= \rho^{k+1}((\sigma\upsilon\nu(k\varphi)\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi - \eta\mu(k\varphi)\eta\mu\varphi) + (\eta\mu(k\varphi)\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi + \sigma\upsilon\nu(k\varphi)\cdot\eta\mu\varphi) =$$

$$= \rho^{k+1}(\sigma\upsilon\nu((k+1)\varphi) + i\eta\mu((k+1)\varphi))$$

Αρα, αληθευει για $\nu \in \mathbb{N}$

Ετσι, $z^{\nu} = \sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) + i\,\eta\mu(\nu\varphi)$

Δηλαδη,

$$(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)^{\nu} = \sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) + i\,\eta\mu(\nu\varphi),\ \nu \in \mathbb{N}^*$$

Τυπος De Moivre

Κάτι τελευταιο για $\nu = 0$

$1 = z^0 = \rho^0(\sigma\upsilon\nu(0\varphi) + i\eta\mu(0\varphi)) = 1(1 + i\cdot 0) = 1$ ισχυει

Αρα ισχυει για ολους τους φυσικους ο τυπος De Moivre

Επειτα, εξετάζουμε εάν ισχύει και για τους ακεραιους

$$z^{-\nu} = \frac{1}{z^{\nu}} = \frac{1}{\rho^{\nu}(\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) + \eta\mu(\nu\varphi)i)} = \rho^{-\nu}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) - i\eta\mu(\nu\varphi)}{1} =$$

$$= \rho^{-\nu}\cdot(\sigma\upsilon\nu((-\nu)\varphi)) + i\,\eta\mu((-\nu)\varphi)$$

Ετσι ο τυπος De Moivre ισχυει $\forall\, \nu \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση:

$A=\{z : z^5=\bar{z}\}$ Ποια τα z που ικανοποιούν την εξίσωση

ΛΥΣΗ

$z=\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)$

$$\left.\begin{array}{l} z^5=\rho^5(\sigma\upsilon\nu(5\varphi)+i\,\eta\mu(5\varphi)) \\ \bar{z}=\rho\,(\sigma\upsilon\nu(5\varphi)-i\eta\mu\varphi) \end{array}\right\} \rho^5(\sigma\upsilon\nu(5\varphi)+i\eta\mu(5\varphi))=\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi-\eta\mu\varphi\, i)$$

Μετρο

$\Rightarrow \rho^5=\rho \Rightarrow \rho^4=1 \Rightarrow \rho=1$

Άρα, $\sigma\upsilon\nu(5\varphi)+i\eta\mu(5\varphi)=\sigma\upsilon\nu\varphi-i\eta\mu\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu(6\varphi)+i\eta\mu(6\varphi)=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu(6\varphi)=1$ και $\eta\mu(6\varphi)=0$

$6\varphi=2\lambda\pi$ δηλ. αρτιο πολ/σιο του π

$6\varphi=\kappa\pi$ καθε πολ/σιο του π

άρα $\boxed{\varphi=\frac{\lambda\pi}{3}}$, $\lambda\in\mathbb{Z}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΖΗΓΟΥΣ:

1) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$

2) $\overline{zw}=\bar{z}\cdot\bar{w}$

3) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ Απόδ. $\overline{\frac{z}{w}}=\overline{\frac{z\bar{w}}{|w|^2}}=\frac{\bar{z}\cdot w}{|w|^2}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

Έστω $\underline{R(z,a_0,a_1,\dots,a_\nu)} = a_\nu z^\nu + a_{\nu-1} z^{\nu-1} + \dots + a_0 = 0$ τότε

$\overline{R(z,a_0,a_1,\dots,a_\nu)} = \overline{a_\nu}\cdot(\bar{z})^\nu + \overline{a_{\nu-1}}\,(\bar{z})^{\nu-1} + \dots + \overline{a_0} = 0$

με $a_j \in \mathbb{R}$ : $a_j = \overline{a_j} \Longrightarrow 0 = a_\nu(\bar{z}^\nu) + a_{\nu-1}(\bar{z})^{\nu-1} + \dots + a_0$

Δηλαδή

$E_\nu(z) = 0 \Leftrightarrow E_\nu(\bar{z}) = 0$ το $z, \bar{z}$ ρίζες της εξίσωσης

ΕΦΑΡΜΟΓΗ:

Στην σχέση:

$$z^\nu = \text{συν}\nu\varphi + i\,\text{ημ}\nu\varphi = (\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi)^\nu$$

Για $\nu=3$, $(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi)^3 = \text{συν}3\varphi + i\,\text{ημ}3\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{συν}^3\varphi + 3\text{συν}^2\varphi\, i\,\text{ημ}\varphi + 3\text{συν}\varphi\,(i\,\text{ημ}\varphi)^2 + (i\,\text{ημ}\varphi)^3 =$

$= \text{συν}^3\varphi + i\,3\text{συν}^2\varphi\cdot\text{ημ}\varphi - 3\,\text{συν}\varphi\cdot\text{ημ}^2\varphi - i\,\text{ημ}^3\varphi =$

$= (\text{συν}^3\varphi - 3\text{συν}\varphi\cdot\text{ημ}^2\varphi) + i\,(3\text{συν}^2\varphi\,\text{ημ}\varphi - \text{ημ}^3\varphi)$

Ενώ $\text{συν}(3\varphi) = \text{συν}^3\varphi - 3\text{συν}\varphi\,\text{ημ}^2\varphi = \text{συν}^3\varphi - 3\text{συν}\varphi(1-\text{συν}^2\varphi) =$

$= 4\text{συν}^3\varphi - 3\text{συν}\varphi$

$\text{ημ}(3\varphi) = 3\text{συν}^2\varphi\,\text{ημ}\varphi - \text{ημ}^3\varphi = 3(1-\text{ημ}^2\varphi)\,\text{ημ}\varphi - \text{ημ}^3\varphi =$

$= 3\text{ημ}\varphi - 4\text{ημ}^3\varphi$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ:

Έστω $z = \rho\,(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi)$ και $a = r\,(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$

που ισχύει $z^\nu = a \Rightarrow \rho^\nu = r \Rightarrow \rho = \sqrt[\nu]{r}$

Τότε

$\cancel{\rho^\nu}\,(\text{συν}(\nu\varphi) + i\,\text{ημ}(\nu\varphi)) = \cancel{r}\,(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{συν}(\nu\varphi) = \text{συν}\theta \Leftrightarrow \nu\varphi = \theta + 2k\pi \ \& \ \cancel{\nu\varphi = -\theta} \\ \text{ημ}(\nu\varphi) = \text{ημ}\theta \Leftrightarrow \nu\varphi = \theta + 2k\pi \ \& \ \cancel{\nu\varphi = \pi - \theta} \end{cases}$$

Έτσι, $\varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{\nu}$

για $k=0 \longrightarrow \varphi_1 = \frac{\theta}{v}$

για $k=1 \longrightarrow \varphi_2 = \frac{\theta+2\pi}{v}$

$\vdots$

για $k=v-1 \longrightarrow \varphi_v = \frac{\theta+2(v-1)\pi}{v}$

οι διαφορετικες τιμες του ορισματος

για $k=v \longrightarrow \varphi_{v+1} = \frac{\theta}{v} + \frac{2v\pi}{v} = \frac{\theta}{v} + 2\pi = \varphi_1$

απο $v, v+1, \ldots$ ή $-1, -2, \ldots$ επαναλαμβάνονται οι γωνίες των αντιστοιχων περιπτώσεων $k=0,1,\ldots,v-1$

Οι ν-οστες ρίζες είναι

$$z_k = \sqrt[v]{r}\,(\sigma\upsilon\nu(\varphi_k) + i\,\eta\mu(\varphi_k)) \quad , k=0,1,2,\ldots,v-1$$

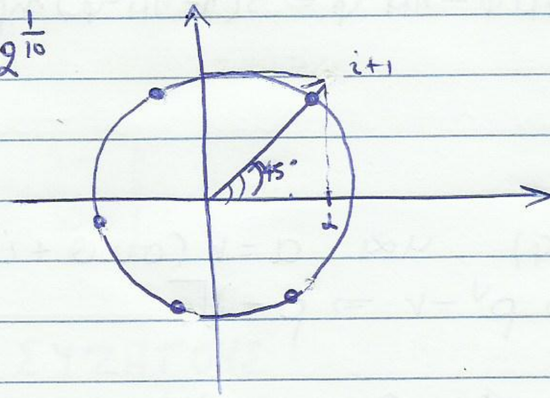
οπου για $r=1$, $\theta=0$ ο μιγαδικος $a=1$

$$\varepsilon_k = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2k\pi}{v}\right) + i\,\eta\mu\left(\frac{2k\pi}{v}\right) \quad , k=0,1,2,\ldots,v-1$$

Πχ

$\left|\sqrt[5]{1+i}\right| = 2^{\frac{1}{10}}$

κυκλος ακτίνας $2^{1/10}$ και




$$\frac{\frac{\pi}{4}}{5} = \frac{\pi}{20}$$